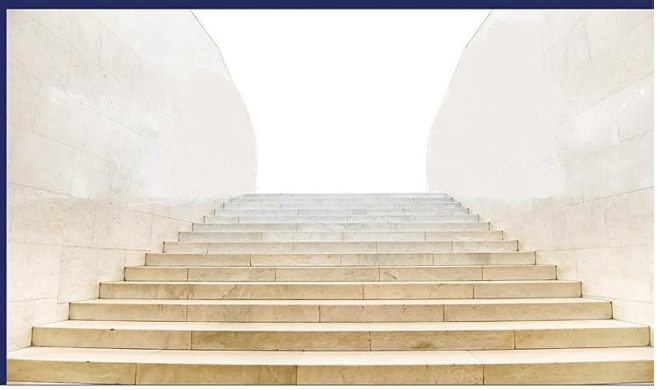
Немецкий математик и логик Готлоб Фр\'еге (1848-1925) первым ввёл кванторы как отдельные элементы структуры языка в работе "Запись в понятиях", вышедшей в Халле, Германия, в 1879 году. При этом он заменил нечёткое понятие "переменного количества" точно определённым понятием переменной как знака особого сорта. Чуть позже и на другой основе кванторы были введены американским логиком Чарлзом Пирсом (1839–1914), который и назвал их "кванторами". Введение в логику кванторов явилось событием исключительной важности, ибо тем самым был найден остававшийся до того незамеченным важнейший элемент структуры языка. Благодаря этому открытию удалось получить точное описание языков математических теорий и начать изучение их структуры и структуры самих теорий. На этом пути были даны точные определения понятиям высказывания, истины, доказательства и теоремы, получено точное описание аксиоматического метода, выяснено соотношение между истинностью и доказуемостью в аксиоматических теориях... Так благодаря открытию кванторов год 1879-й стал годом рождения новой логики. В работе предлагается детальное, но в то же время доступное введение в круг идей, связанных с этим открытием.



А. Х. Назиев

Кванторы в математике и её преподавании

Эвристика, грамматика, семантика, дедуктика кванторов

Кандидат физико-математических наук, доктор педагогических наук, профессор. 125+ печатных работ, 140+ электронных публикаций. Рязанский Государственный Университет имени С. А. Есенина, Рязанский Институт Развития Образования, Государственный Социально-Гуманитарный Университет (г. Коломна).

9 786200 227041

LAP LAMBERT Academic Publishing

КВАНТОРЫ
в математике
и её преподавании

А. Х. Назиев

Содержание

1 Эвристика кванторов 4

2 Грамматика кванторов: свободные и связанные переменные 14

3 Логика кванторов 20

4 Задачи о рыцарях и лжецах при изучении логики кванторов 27

5 Геометрическая интерпретация кванторов 35

6 Некоторые законы логики кванторов 42

7 Доказательство предложений с различными кванторными приставками 50

7.1 Обобщения 50

7.2 Подтверждения 52

7.3 Подтверждения обобщений 54

7.4 Обобщения подтверждений 55

7.5 Предложения с «кванторными зигзагами» 56

1. Эвристика кванторов

Русское ‘квантор’ происходит от латинского ‘quantum’, означающего ‘сколько’. В языкознании кванторными оборотами называют слова или группы слов в предложении, с помощью которых даётся оценка количества объектов, удовлетворяющих предложению. Помимо числительных, с помощью которых указывается точное количество, сюда же относятся слова, дающие общую оценку: ‘много’, ‘мало’, ‘все’, ‘некоторые’ и т. п. В логике наибольшее внимание уделяется кванторным оборотам со словами ‘все’, ‘некоторые’ и их синонимами. Приведём примеры предложений с такими кванторными оборотами, выделив последние курсивом.

Все кроты чёрные.
Кто-то изобрёл колесо.
Всяк сам себе голова.
Некоторые птицы не умеют летать.
Всё стало *вокруг* голубым и зелёным.

С давних времён предложения с кванторными оборотами привлекали к себе внимание логиков. По внешнему виду они очень походили на предложения, не содержащие таких оборотов, но «вели» себя совершенно иначе.

Так, предложение

(1) Где-то цветут каштаны

очень похоже на предложение

(2) В Москве цветут каштаны,

однако логическое строение этих предложений существенно различается. Истинность предложения (2) зависит от одного вполне определённого объекта, указанного в самом предложении, — города Москва, чего никак не скажешь о предложении (1). Чтобы установить, что предложение (2) ложно, достаточно убедиться в том, что в Москве не цветут каштаны. Но достаточно ли этого или чего-нибудь похожего, чтобы установить ложность предложения (1)? Явно —

нет, ибо даже если каштаны не цветут в Москве, они вполне могут цвести в Одессе или Париже. Таким образом, предложение

(3) В Москве не цветут каштаны,

является отрицанием предложения (2), тогда как предложение

(4) Где-то не цветут каштаны,

(получаемое из (1) точно так же, как (3) — из (2)) не является отрицанием предложения (1) (это ясно хотя бы потому, что предложения (1) и (4) вполне могут быть истинными одновременно, что для предложения и его отрицания невозможно).

Из предложений

На портрете изображён А. С. Пушкин;
А. С. Пушкин — автор романа «Евгений Онегин»

мы совершенно справедливо заключим, что, значит, на портрете изображён автор романа «Евгений Онегин». Но если мы на основании предложений

На портрете изображён кто-то;
Кто-то изобрёл колесо

решим, что на портрете изображён изобретатель колеса, то, скорее всего, ошибёмся.

За многие века было подмечено большое количество подобных несоответствий. И только в 1879 году было найдено решение всех накопившихся к тому времени проблем. Это удалось сделать немецкому учёному Го́тлобу Фре́ге (1848–1925), одному из величайших математиков и логиков в истории человечества.

Чтобы понять, как Фреге пришёл к найденному им решению, рассмотрим поближе какое-нибудь предложение с кванторным оборотом, скажем

(5) Каждое число — целое

(для краткости мы пишем ‘число’ вместо ‘действительное число’). Ту же самую мысль можно передать и иначе:

Каково бы ни было число, оно — целое.

Здесь ‘оно’ означает то же, что и ‘число’. Заменим ‘оно’ на ‘число’. Получим:

(6) Каково бы ни было число, число — целое.

Рассмотрим внимательнее предложение (6). В нём чётко выделяются две части:

(7) число — целое

и

(8) Каково бы ни было число.

Часть (7) является предложением. Она очень похожа на предложения

(9) 2 — целое,

(10) 3,5 — целое.

и т. п., но имеет от них важное отличие: там, где (9), (10) содержат константы ‘2’, ‘3,5’, изображающие вполне определённые числа, (7) содержит переменную ‘число’, изображающую неопределённое (нефиксированное, произвольное) число. Мы уже знаем, что это — весьма существенное отличие. Предложение (9) истинно, предложение (10) ложно, предложение же (7) не истинно и не ложно; оно выполняется при одних значениях переменной (например, при значении 2) и не выполняется — при других (например, при значении 3,5).

Часть (8) предложения (6) даёт общую оценку количества объектов, удовлетворяющих предложению (7). Она называется *квантором всеобщности по переменной ‘число’*. Часто оборот (8) заменяют другими:

для любого *числа*, при любом *числе*,
для всех *чисел*, при всех *числах*,
для каждого *числа*, при каждом *числе*,

а также совсем коротким

(11) $(\forall$ *число*$)$.

Подчеркнём, что все эти обороты речи равноценны, всё это — один и тот же квантор всеобщности по переменной ‘число’, по-разному записываемый. При чтении сокращение (11) заменяют любым из указанных выше оборотов. Пишут:

(12) $(\forall$*число*$)$(*число* — целое)

а читают это так: каково бы ни было *число*, *число* — целое; для любого *числа*, *число* — целое, и т. д.

Слово ‘число’ относится к разряду так называемых *общих имён*. В математике, как Вы знаете, общие имена называют *переменными* и очень часто используют в качестве них буквы. Чтобы получить формулировку, более близкую к математике, заменим слово ‘число’ буквой, скажем, ‘x’, считая её переменной с множеством всех чисел в качестве области значений. Получим:

(6′) Каково бы ни было x, x — целое,

(12′) $(\forall x)(x$ — целое$)$.

Знак ‘$\forall$’ называется *знаком всеобщности* (в отличие от всего знакосочетания (11), называемого, как и (8), *квантором* всеобщности). Знак ‘$\forall$’ ввёл немецкий логик Герхард Генцен в 1935 году, перевернув первую букву немецкого слова ‘Alle’ (так что этот знак является производным от указанного немецкого слова, а не от английского ‘All’, как часто ошибочно утверждается). Сам Фреге употреблял знак довольно сложного начертания. Англичане и американцы в течение нескольких десятилетий просто заключали переменную в круглые скобки (т. е. писали ‘(x)’ вместо ‘$(\forall x)$’ (а многие и сейчас так поступают).

Предложения (12), (12′) значительно отличаются от предложения (5), и не только по внешнему виду. Обычно обращают внимание на значок ‘∀’, но не в нём дело. С логической точки зрения предложение (6) ничем не хуже (12). Основное различие — не между (12) и (6), а между (5) и (6). Именно этого перехода не мог на протяжении почти 2500 лет совершить ни один из логиков и сумел — Готлоб Фреге. Основная заслуга Фреге заключается отнюдь не в том, что он стал писать вместо слов «закорючку» (как это, к сожалению, представляют во многих руководствах по логике), а в том, что он сумел внести в предложения наподобие (5) чёткую логическую структуру: квантор плюс предложение с переменной. И это явилось событием чрезвычайной важности.

В предложении (5) сказуемое ‘— целое’ связывалось с оборотом ‘каждое число’, из-за чего можно было подумать, что отрицанием предложения (5) является предложение

Каждое число — не целое,

что, конечно, неверно. В предложении же (6) сказуемое ‘— целое’ связано только со вторым ‘число’, откуда ясно, что поставив частицу ‘не’ перед словом ‘целое’, мы получим отрицание только для предложения

число — целое,

а не предложения (6). Таким образом, сам способ записи предложения (5) в виде (6), или, что то же самое, (12), предохраняет нас от некоторых ошибок. Другие многочисленные достоинства указанной формы записи предложений с кванторными оборотами мы увидим далее. А пока рассмотрим ещё один кванторный оборот естественного языка.

Производя над предложением

Некоторые числа — целые

преобразования, подобные тем, что производились над предложением (6), получим:

(13) Для некоторого *числа*, *число* — целое.

В предложении (13) — тоже две части. Одна нам уже известна, это предложение ‘число — целое’. Другая,

Для некоторого *числа*,

называется *квантором существования по переменной* ‘число’. Часто пишут также:

хотя бы для одного *числа*;
при некотором *числе*;
найдётся такое *число*, что;
существует такое *число*, что

и, совсем коротко,

$(\exists$ *число*$)$.

Все эти сочетания называются *кванторами существования* и считаются синонимами. Знак ‘$\exists$’ называется *знаком существования*. Это — повёрнутая назад буква ‘E’, первая буква английского слова ‘Exists’, означающего то же, что и русское ‘существует’.

Предложения, начинающиеся с квантора всеобщности, называют *обобщениями*, начинающиеся с квантора существования, — *подтверждениями*. Точнее, предложение

$$(\forall x)(\dots x \dots)$$

называется обобщением предложения ‘$\dots x \dots$’ по переменной ‘x’, предложение

$$(\exists x)(\dots x \dots) —$$

подтверждением предложения ‘$\dots x \dots$’ по переменной ‘x’. Разумеется, вместо ‘x’ может стоять любая другая переменная, а вместо ‘$(\forall x)$’ и ‘$(\exists x)$’ — любые их эквиваленты.

Обратим внимание на одно обстоятельство, связанное с употреблением в качестве переменных отдельных букв вместо целых слов. Из предложения

(14) Все кроты — чёрные

самого по себе видно, что речь идёт о кротах. А вот чтобы понять, о чём идёт речь в предложении

(15) $(\forall x)(x$ — чёрный$)$,

нужно ещё знать, какова область значений переменной ‘x’. Если это — множество всех кротов, то (14) означает то же, что и (13). Если же — множество всех котов, то (14) говорит, что

(16) Все коты — чёрные.

А если областью значений переменной ‘x’ является множество всех животных, предложение (14) означает, что

(17) Все животные — чёрные.

Таким образом, *содержание предложения с квантором существенно зависит от области значений подкванторной переменной.*

Чтобы освободиться от необходимости постоянно следить за областями значений используемых букв-переменных, во многих научных теориях для всех таких переменных выбирают какую-нибудь одну универсальную область значений. Её называют *универсумом*, *вселенной* или *областью исследования* (данной теории). Естественным кандидатом на роль вселенной в ботанике является множество всех растений, в зоологии — множество всех животных, в арифметике — множество всех натуральных чисел, и т. д.

Посмотрим, к каким это ведёт изменениям в формулировках предложений. Вернёмся к предложениям (13), (15) и попробуем переформулировать их с помощью кванторов по переменным, областью значений которых является множество всех животных. Возьмём произвольное животное и спросим себя: в каком случае в соответствии с (13) мы станем утверждать, что оно — чёрное? Ответ ясен: мы станем, в соответствии с (13), утверждать, что животное — чёрное, *если* это животное — крот. Таким образом, если приписать переменной ‘x’ в качестве области значений множество всех животных, то мысль, выражаемая предложением (13), будет передаваться предложением:

(18) $(\forall x)$(если x — крот, то x — чёрный).

А предложению (15) будет соответствовать предложение

(19) $(\forall x)$(если x — кот, то x — чёрный).

Мы видим, что наше соглашение о переменных не только освобождает от необходимости (в пределах действия этого соглашения) следить за областями значений подкванторных переменных, но и позволяет в явном виде отражать в предложениях те различия, которые иначе нужно как-то усматривать вне предложений.

Рассмотрим другое предложение:

(20) Некоторые коты — чёрные.

Если мы напишем

$$(\exists x)(x \text{ — чёрное}),$$

то получится предложение, говорящее, что

Некоторое животное — чёрное.

Мы же, говоря (20), утверждаем не только то, что некоторое животное — чёрное, но ещё и то, что это животное — кот. Короче говоря, мы утверждаем в (20), что некоторое животное является котом и чёрным. Ещё короче:

(21) $(\exists x)(x \text{ — кот и } x \text{ — чёрное}).$

Обращаем внимание: предложение с квантором всеобщности привело нас к импликации, тогда как предложение с квантором существования — к конъюнкции.

Мы рассмотрели только два кванторных оборота естественного языка и на этой основе ввели два квантора. Оказывается, очень многие другие кванторные обороты могут быть переданы с помощью рассмотренных двух кванторов. Чтобы почувствовать это, переформулируйте с помощью кванторов всеобщности и существования предложения, которые мы привели в качестве примеров в начале этого параграфа.

Посмотрим теперь на примерах, как использование кванторов позволяет уточнять выражение мысли и легко и наглядно решать задачи, которые без них выглядят достаточно неопределёнными. В качестве предварительного шага перепишем, используя кванторы, предложение

(22) Петров — самый высокий человек.

Высказывая (22), мы утверждаем тем самым, что

Петров выше всех *других* людей,

или, чуть иначе,

Петров выше каждого человека, отличного от него.

Это означает, что

Какого бы человека мы ни взяли,
если это — не Петров, то Петров выше этого человека.

Заменяя для краткости ‘человека’ буквой[1], скажем, ‘x’, областью значений которой является множество всех людей, получаем:

Какого x ни возьми, если x — не Петров, то Петров выше x,

или, совсем коротко,

(23) $(\forall x)$(если $x \neq$ Петров, то Петров выше x).

Немного изменим исходное предложение:

(24) Петров — самый высокий *хоккеист*.

Ясно, что (22) не является эквивалентом для (23), ибо (22), как мы только что установили, является эквивалентом для (21), выражающего другую мысль. Чтобы Петров был самым высоким *хоккеистом*, ему не нужно быть выше всех других *людей*, он должен быть только выше всех отличных от него *хоккеистов*, так что ближе к (23) следующее:

(25) $(\forall x)$(если x — хоккеист и $x \neq$ Петров, то Петров выше x).

Но и это — ещё не то, что нужно. Предложение (25) говорит, что Петров выше всех, отличных от него, хоккеистов, однако оно ничего не говорит о том,

[1] Заменяя ‘человека’, а не человека!

является ли сам Петров хоккеистом, тогда как (24) говорит, что является. Таким образом, подлинным эквивалентом для (24) является не (25), а

$$(26)\qquad \begin{cases} (\text{Петров — хоккеист}) \text{ и} \\ (\forall x)(\text{если } x \text{ — хоккеист и } x \neq \text{ Петров, то Петров выше } x). \end{cases}$$

Предложение (26) оказалось длиннее, чем (24), но это не должно заслонить от нас главного: предложение (26) точнее, чем (24), передаёт ту же мысль. То, что в предложении (24) представлено в скрытом виде, в предложении (26) выявлено. Предложение (26) совершенно определённо показывает, что́ нужно сделать, чтобы убедиться в том, что Петров — самый высокий хоккеист: нужно, во-первых, выяснить, является ли сам Петров хоккеистом и, во-вторых, сравнить Петрова с каждым отличным от него хоккеистом x и установить, что во всех случаях Петров окажется выше x. Ничего подобного в предложении (24) нет. *Использование кванторов уточняет выражение мысли.*

Продемонстрируем это ещё и на примере следующей задачи.

Задача. Являются ли

> самый высокий футболист среди хоккеистов
> и
> самый высокий хоккеист среди футболистов

одним и тем же лицом?

Решение. Пусть

> A — самый высокий футболист среди хоккеистов,
> B — самый высокий хоккеист среди футболистов.

Тогда:

1. A — футболист и A — хоккеист и
2. $(\forall x)$(если x — футболист и x — хоккеист и $x \neq A$, то A выше x),
3. B — хоккеист и B — футболист и

4. $(\forall x)$(если x — хоккеист и x — футболист и $x \neq B$, то B выше x).

Покажем, что $A = B$. Допустим противное: $A \neq B$. Тогда B — футболист и B — хоккеист и $B \neq A$. Значит, в силу условия 2), A выше B. С другой стороны, A — хоккеист и A — футболист и $A \neq B$. Значит, в силу условия 4), B выше A. Таким образом, если допустить, что $A \neq B$, то окажется, что A выше B и B выше A. Это невозможно. Выходит, наше предположение неверно, и $A = B$, как и утверждалось.

Этот пример прекрасно показывает, как введение кванторов уточняет язык и делает простым и чётким решение, которое без кванторов оставляет ощущение неудовлетворённости. Чтобы ещё раз почувствовать это, решите самостоятельно следующую задачу.

Задача. Являются ли лучший футболист среди хоккеистов и лучший хоккеист среди футболистов одним и тем же лицом?

Кажется, что задача — практически такая же. Однако удастся ли и для неё получить тот же ответ?

2. Грамматика кванторов: свободные и связанные переменные

Заменяя общие имена естественного языка буквами, мы видели, что выбор буквы не играет принципиальной роли: одну и ту же мысль можно передавать, используя разные буквы. Так, предложения

$$(\exists x)(x < 3); \quad (\exists y)(y < 3); \quad (\exists z)(z < 3)$$

— все говорят одно и то же: некоторое число меньше, чем 3.

И всё же выбор буквы-переменной не вполне произволен. Чтобы убедиться в этом, рассмотрим, например, предложение

Некоторое число меньше x.

Преобразуя его аналогично тому, как это делалось выше, получим:

Для некоторого *числа*, *число* меньше x.

Какую букву поставить в этом предложении вместо слова ‘число’? Любую, кроме x:

Для некоторого y, y меньше x;
Для некоторого z, z меньше x;
Для некоторого a, a меньше x ...

Все эти предложения выражают ту же мысль, что и исходное предложение: некоторое число меньше x. Но если мы выберем для этой цели ‘x’, то получим предложение

Для некоторого x, x меньше x,

выражающее совсем иную мысль: некоторое число меньше *себя*.

Рассмотрим другое предложение:

$$z = 0.$$

Нулём, как мы помним, называется действительное число, которое в сумме с любым другим числом даёт это другое число. Иными словами, $z = 0$ в точности тогда, когда, для любого *числа*, сумма (этого) *числа* с z равна (этому) *числу*. Какой буквой допустимо здесь заменить слово ‘число’? Любой, кроме ‘z’. Например,

$$\text{Для любого } y,\ z + y = y.$$

Но если мы по неосторожности возьмём для этой цели ‘z’, получится:

$$\text{Для любого } z,\ z + z = z, \text{—}$$

предложение, выражающее совсем другую мысль.

Ещё один пример. Перепишем с кванторами предложение

(1) каждое число обладает противоположным.

Преобразуя его аналогично показанному выше, получаем последовательно:

Каково бы ни было *число*, *оно* обладает противоположным;
Каково бы ни было *число*, *число* обладает противоположным;
$(\forall t)(t$ обладает противоположным).

Предложение, стоящее под квантором, соблюдая указанные меры предосторожности, преобразуем в:

$$\text{для некоторого } y,\ y + t = 0;$$
$$(\exists y)(y + t = 0).$$

В итоге получим для (1) эквивалент

$$(\forall x)(\exists y)(y + t = 0).$$

Теперь мы введём термины, которые удобно употреблять в подобных обстоятельствах. Вернёмся к первому примеру, в котором мы обнаружили эквивалентность предложений '$x = 0$' и 'Для любого z, $z + x = 0$'. Приглядимся внимательно к этим предложениям. Во втором из них мы ясно видим переменную 'z', отсутствующую в первом. И тем не менее оба предложения выражают, как мы убедились, одну и ту же мысль!

Возьмём другое предложение:

$$\text{число } t \text{ обладает противоположным.}$$

Оно, как мы помним, означает, что

$$(\exists y)(y + t = 0).$$

Во втором встречается переменная 'y', в первом — не встречается, тем не менее оба предложения означают одно и то же.

Ещё пример. Предложение

$$(\exists x)(x^2 + px + q = 0) \tag{2}$$

говорит, что уравнение '$x^2 + px + q = 0$' имеет корень. Это, как Вы, конечно, помните, бывает в точности тогда, когда

$$p^2 - 4q \geqslant 0. \tag{3}$$

Таким образом, предложения (2) и (3) эквивалентны. Снова одно из двух эквивалентных предложений содержит переменную, которой нет в другом.

Теперь обратим внимание, что во всех рассмотренных примерах «мерцающие» переменные появляются или исчезают вместе с «действующими» на них кванторами. Мы видим, что

- *присоединение к предложению квантора по какой-либо переменной ликвидирует зависимость от этой переменной.*

Предложение

$$x < 0$$

говорит, что число x меньше нуля и зависит от переменной ‘x’, выполняясь при одних её значениях и не выполняясь — при других. Предложения

$$\text{‘}(\forall x)(x < 0)\text{’} \quad \text{и} \quad \text{‘}(\exists x)(x < 0)\text{’}$$

говорят, соответственно, что все числа меньше нуля и что некоторые числа меньше нуля, и ни от каких переменных не зависят, являясь просто ложным и истинным высказываниями соответственно.

Предложение

$$x \cdot y = 1$$

говорит, что произведение числа x на число y равно 1, и, естественно, зависит от того, что это за числа (то есть от значений переменных ‘x’ и ‘y’). Предложение

$$(\exists x)(x \cdot y = 1)$$

говорит, что число y обладает обратным и зависит только от того, каково это число. Предложение

$$(\forall y)(\exists x)(x \cdot y = 1)$$

говорит, что каждое число обладает обратным, и ни от каких переменных уже не зависит, являясь просто ложным высказыванием.

Этот список примеров нетрудно увеличить, но и теперь уже ясно, что

- *необходимо различать в предложениях переменные, которые находятся под действием кванторов, и переменные, которые не находятся под действием кванторов. Первые называют* СВЯЗАННЫМИ, *вторые —* СВОБОДНЫМИ *переменными данного предложения. Вообще говоря, предложения зависят от своих свободных переменных и не зависят — от связанных.*

- *Предложения, в которых нет свободных переменных (и которые потому ни от каких переменных не зависят), называют* ВЫСКАЗЫВАНИЯМИ.

В предложении ‘$x = y$’ переменные ‘x’ и ‘y’ свободны, ‘z’, ‘t’ и все остальные — не свободны и не связанны. В предложении ‘$(\exists x)(x = y)$’ переменная ‘x’ свободна, переменная ‘y’ связанна, все остальные — не свободны и не связанны. В предложении ‘$(\forall y)(\exists x)(x = y)$’ переменные ‘$x$’ и ‘$y$’ связанны, а все остальные переменные не свободны и не связанны. Поскольку в нём нет свободных переменных, это — высказывание (истинное).

Упражнения

Для каждого из следующих предложений выберите вселенную и постарайтесь наиболее точно передать выражаемую им мысль с помощью предложения с кванторами по переменным, пробегающим выбранную Вами вселенную.

1. Всё хорошо, что хорошо кончается.
2. Некоторые студенты не любят логику.
3. Ни одна планета не излучает света.
4. Всё стало вокруг голубым и зелёным.
5. На Луне люди не живут.
6. Только на Земле есть жизнь.
7. Человек вышел в открытый космос.
8. а) Пётр кого-то любит; б) Каждый кого-то любит.
9. а) Линда любит только себя. б) Некоторые любят только себя.
10. Все люди — братья.
11. Нет самого высокого мужчины.

12. Таких холодных дней ещё не было.

13. На всякого мудреца довольно простоты.

14. а) x есть нуль; б) нуль существует.

15. а) Число x обладает противоположным;
    б) Каждое число обладает противоположным.

16. а) x меньше некоторого числа;
    б) Каждое число меньше некоторого числа;
    в) некоторое число меньше x;
    г) некоторое число меньше каждого числа.

17. а) Число x — рациональное;
    б) число x — иррациональное.

18. а) Точки $A,\ B$ и C лежат на одной прямой;
    б) Точки $A,\ B$ и C не лежат на одной прямой.

19. Прямые a и b пересекаются.

20. Прямые a и b (в пространстве) скрещиваются.

21. Фигуры F и G равны.

22. Плоскости α и β перпендикулярны.

23. Угол между прямыми a и b в пространстве равен φ.

24. Функция f постоянна на множестве P.

25. Функция f возрастает на множестве P.

26. Функция f достигает наибольшего значения.

27. Функция f — периодическая.

28. Функция f принимает на отрезке $[a,\ b]$ все значения из отрезка $[c,\ d]$.

29. На каждом луче от его начала можно отложить отрезок любой данной длины.

30. Решите задачу, сформулированную в конце предыдущего пункта.

3. Логика кванторов

То, что было сказано выше о кванторах, естественно назвать грамматикой кванторов. Логика же начинается тогда, когда обращаются к вопросам истинности. Этим мы и займёмся теперь.

Начнём с соглашения об истинностном значении обобщений.

Обобщение $(\forall x)(\dots x \dots)$ считается верным, если предложение ‘$\dots x \dots$’ выполняется для всех значений переменной ‘x’, и считается неверным, если предложение ‘$\dots x \dots$’ не выполняется хотя бы для одного значения переменной ‘x’.

Итак, чтобы выяснить, является или нет верным предложение ‘$(\forall x)(\dots x \dots)$’, нужно удалить из него квантор всеобщности и рассмотреть отдельно стоящее после квантора предложение ‘$\dots x \dots$’. Если оно выполняется при всех значениях переменной ‘x’, то обобщение является верным, если не при всех, то — неверным.

Это соглашение мы сформулировали таким образом, чтобы оно было применимо независимо от того, есть или нет в предложении ‘$(\forall x)(\dots x \dots)$’ свободные переменные. Если — нет, то оно является высказыванием, и речь идёт об истинности или ложности этого высказывания. А именно, говорится, что высказывание ‘$(\forall x)(\dots x \dots)$’ истинно, если предложение ‘$\dots x \dots$’ выполняется при всех значениях переменной ‘x’, и — ложно, если предложение ‘$\dots x \dots$’ не выполняется хотя бы для одного значения переменной ‘x’.

Если же в предложении ‘$(\forall x)(\dots x \dots)$’ есть свободные переменные, то нужно сначала выбрать значения этих переменных. Принятое нами соглашение в

этом случае означает, что предложение ‘$(\forall x)(\dots x \dots)$’ выполняется для выбранных значений свободных переменных, если предложение ‘$\dots x \dots$’ выполняется при этих значениях свободных переменных и всех значениях переменной ‘x’. Рассмотрение примеров поможет Вам освоиться с этим соглашением.

Начнём с предложения

$$(\forall x)(x^2 > 0). \tag{1}$$

В нём нет свободных переменных, это — высказывание. Чтобы определить, истинно оно или ложно, нужно рассмотреть отдельно предложение, стоящее после квантора всеобщности, и выяснить, при всех или не при всех x выполняется это предложение. Поскольку очевидно, что при $x = 0$ предложение ‘$x^2 > 0$’ не выполняется, высказывание (1) ложно.

Подчеркнём: предложение ‘$x^2 > 0$’ зависит от переменной ‘x’; оно выполняется при одних её значениях и не выполняется — при других. С высказыванием (1) дела обстоят иначе. В нём нет свободных переменных, поэтому *его истинность ни от каких переменных не зависит.* Оно — ложно. Не наполовину ложно, не чуть-чуть ложно, а просто ложно.

Теперь рассмотрим предложение

$$(\forall x)(x^2 + 2x + 1,2 > 0). \tag{2}$$

И это — высказывание. Чтобы выяснить, истинно оно или ложно, рассмотрим отдельно стоящее после квантора предложение

$$x^2 + 2x + 1,2 > 0 \tag{3}$$

и попытаемся установить, при всех или не при всех x выполняется это предложение. Легко устанавливается, что — при всех. Действительно, для любого x,

$$x^2 + 2x + 1,2 = (x^2 + 2x + 1) + 0,2 = (x + 1)^2 + 0,2 \geqslant 0,2 > 0.$$

Таким образом, предложение (3) выполняется при всех значениях x. Это означает, что высказывание (2) истинно.

Ещё один пример:

$$(\forall x)((a - 2)x = 0). \tag{3}$$

В этом предложении есть одна свободная переменная — ‘a’. Выясним, выполняется ли оно при $a = 5$. Для этого нужно рассмотреть отдельно предложение

$$(a - 2)x = 0,$$

стоящее после квантора, и определить, для всех или не для всех x оно выполняется при $a = 5$, или, что то же самое, для всех или не для всех x выполняется предложение

$$(5 - 2)x = 0,$$

то есть — предложение

$$3x = 0.$$

Ясно, что — не для всех. Поэтому при $a = 5$ высказывание (4) ложно.

Понятно, что так будет обстоять дело всякий раз, когда разность $a-2$ будет отлична от нуля. И только при $a = 2$ мы получим предложение

$$0 \cdot x = 0,$$

выполняющееся при всех x. Таким образом, предложение (4) эквивалентно предложению ‘$a = 2$’, то есть

$$(\forall x)((a - 2)x = 0) \leftrightarrow a = 2.$$

Замечание. Как видно из рассмотренных примеров, наше соглашение об истинностном значении обобщений указывает лишь, *что* и в каком порядке следует выяснять. На вопрос же, *как* это выяснять для того или иного конкретного предложения и каков будет результат, ответа оно не даёт. И не может дать, ибо оно предназначено совсем не для этого. Его назначение — придать точный смысл понятию истинностного значения обобщения. «Вычислить» же это значение — совсем другая задача, способ решения которой существенно зависит от того, какой области знания принадлежит исследуемое конкретное обобщение. Точно так же определение корня уравнения придаёт точный смысл понятию корня, но не даёт, не может дать и не должно давать рекомендаций по отысканию корней конкретных уравнений. *Отыскание* корней — совсем другая задача, способ решения которой существенно зависит от того, к какому разделу математики относится решаемое уравнение.

Обратимся к истинностным значениям подтверждений.

Подтверждение $(\exists x)(\dots x \dots)$ считается верным, если предложение ‘$\dots x \dots$’ выполняется хотя бы для одного значения переменной ‘x’, и считается неверным, если предложение ‘$\dots x \dots$’ не выполняется ни для одного значения переменной ‘x’.

Таким образом, чтобы выяснить, верно или нет подтверждение, нужно удалить из него квантор существования и рассмотреть отдельно стоящее после квантора предложение. Если это предложение выполняется хотя бы для одного значения переменной квантификации, подтверждение считается верным, если же оно не выполняется ни для одного значения переменной квантификации, то подтверждение считается неверным.

И это соглашение применимо как в тех случаях, когда в подтверждении нет свободных переменных, так и к тем случаям, когда они в нём есть. Рассмотрим примеры.

Предложение

$$(\exists x)(x^2 \leqslant 4) \tag{5}$$

— высказывание. Чтобы определить, истинно оно или ложно, нужно рассмотреть отдельно стоящее после квантора предложение

$$x^2 \leqslant 4 \tag{6}$$

и выяснить, выполняется ли оно хотя бы для одного x. Ясно, что выполняется (например, для $x = 1$). Значит, подтверждение (5) истинно.

Снова обратим внимание: предложение (6) выполняется при одних x и не выполняется при других. С подтверждением (5) дело обстоит иначе. Оно от x не зависит и просто — истинно.

А вот предложение

$$(\exists x)(x^2 \leqslant y) \text{ —} \tag{7}$$

не высказывание. В нём есть (ровно одна) свободная переменная — 'y'. Придавая этой переменной значение 4, приходим к вопросу, выполняется ли предложение

$$(\exists x)(x^2 \leqslant 4),$$

на который выше уже был получен положительный ответ.

Теперь придадим переменной 'y' значение -2 и выясним, выполняется ли предложение (7) при этом y. Для этого нужно рассмотреть отдельно стоящее после квантора существования предложение

$$x^2 \geqslant y \tag{8}$$

и выяснить, выполняется ли оно при $y = -2$ хотя бы для одного x. Иначе говоря, имеет ли неравенство

$$x^2 \leqslant -2 \tag{9}$$

хотя бы одно решение? Ясно, что не имеет. Значит, при $y = -2$ неравенство (9) не выполняется ни для одного x. Это означает, что предложение (8) при $y = -2$ не выполняется.

Нетрудно получить обозримое описание всех y, для которых выполняется предложение (7). В самом деле, если (7) выполняется, то (8) выполняется хотя бы для одного x, а тогда $y \geqslant 0$. Обратно, если $y \geqslant 0$, то хотя бы одно x, для которого $x^2 \leqslant y$, существует, а именно, $x = 0$. Таким образом,

$$(\exists x)(x^2 \leqslant y) \leftrightarrow y \geqslant 0.$$

И — последний пример из этой серии. Рассмотрим высказывание

$$(\exists x)(x < 0 \to x > 0). \tag{10}$$

Истинно оно или ложно? Очень многие думают, что — ложно. Обычное объяснение: ни одно число не может быть одновременно меньше нуля и больше нуля. Против этого нечего возразить, но какое это имеет отношение к рассматриваемому высказыванию? В нём ведь не утверждается, что существует число, которое *одновременно* меньше нуля и больше нуля. В нём утверждается только, что существует такое число, что если оно меньше нуля, то оно и

больше нуля. И такое число нетрудно найти. Нужно только припомнить, что, согласно одному из свойств порядка на множестве действительных чисел, каковы бы ни были числа a и b, если $a < b$, то $b > a$. В частности, при $a = b = 0$ получаем, что если $0 < 0$, то $0 > 0$. Иными словами, в силу указанного свойства порядка импликация

$$0 < 0 \to 0 > 0 \tag{11}$$

истинна. Значит, импликация

$$x < 0 \to x > 0, \tag{12}$$

стоящая после квантора существования в исследуемом подтверждении, выполняется хотя бы для одного x и, тем самым, подтверждение (10) истинно.

Истинность импликации (11) можно было обнаружить и без ссылки на упомянутое нами свойство порядка, просто исходя из таблицы истинности для импликации. Пользуясь ею, нетрудно найти ещё сколько угодно чисел, для которых выполняется импликация (12). Разумеется, для обоснования истинности подтверждения (10) достаточно и одного.

Замечание. Обратим ещё раз внимание на то, что при выяснении вопроса об истинностном значении обобщений или подтверждений логике принадлежат лишь указания на то, что и в каком порядке нужно выяснять. Сам же процесс выяснения со всеми его особенностями лежит совсем в другой области — в той, которой принадлежит исследуемое предложение.

Следует понимать, что в большинстве случаев определение истинностного значения обобщений или подтверждений представляет собой трудную (а часто — очень трудную) задачу. За немногими исключениями (предложений типа $1 > 0$, таблицы умножения и т. п.) все математические теоремы являются либо обобщениями, либо подтверждениями (вопреки расхожему мнению, что все они являются импликациями), и целые математические теории посвящаются исследованию условий, при которых выполняются или не выполняются предложения какого-нибудь одного специального вида: алгебраические уравнения (или даже: уравнения 5-й степени), обыкновенные дифференциальные уравнения, дифференциальные неравенства и т. д.

Теоремы, в которых даётся оценка какого-либо класса подтверждений (то есть предложений вида ‘$(\exists x)(\dots x \dots)$’ с теми или иными ограничениями на предложение ‘$\dots x \dots$’, стоящее после квантора), называют *теоремами существования*. Различают три вида таких теорем:

Если ____, то $(\exists x)(\dots x \dots)$;
Если $(\exists x)(\dots x \dots)$, то ____;
$(\exists x)(\dots x \dots)$ экви ____.

В первом случае предложение, стоящее на месте ‘____’, называют *достаточным условием существования*, во втором — *необходимым условием существования*, в третьем — *критерием существования*. Достаточные условия существования часто называют признаками существования. Чаще всего подобные теоремы удаётся доказывать не в чистом виде, а лишь при некоторых дополнительных условиях, получая так называемые условные теоремы существования. Как правило, это — очень трудно доказываемые теоремы. Много таких теорем и в школьном курсе математики, и их никак не назовёшь простыми.

Возьмём, к примеру, теорему о существовании действительных корней у квадратных уравнений:

> если $a \neq 0$, то уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ имеет хотя бы один действительный корень в точности тогда, когда $b^2 - 4ac \geqslant 0$.

Это — условный критерий существования. Доказательство его требует большой предварительной работы, и в полном объёме выходит за рамки школьного курса математики (а именно, в нём используется не доказываемая в школе другая теорема существования — критерий существования квадратных корней из действительных чисел). Ещё более трудны и далеки от полных доказательств в школьном курсе математики теоремы о существовании корней у иррациональных, показательных, логарифмических, тригонометрических уравнений.

Много теорем существования и в школьном курсе геометрии, что, к сожалению, маскируется традиционными формулировками. Например, теорема о том, что серединные перпендикуляры к сторонам треугольника пересекаются

в одной точке, есть теорема существования, согласно которой для любого треугольника *существует* точка, через которую проходят все три серединных перпендикуляра к его сторонам. Теорема эта довольно трудна и в учебнике А. В. Погорелова присутствует лишь в виде задачи «со звёздочкой». Так же как и аналогичные теоремы о высотах, биссектрисах, медианах.

Признаки подобия треугольников являются примерами достаточных условий существования, хотя традиционная формулировка скрывает это обстоятельство. Так, один из признаков подобия треугольников состоит в том, что, если три стороны одного треугольника пропорциональны трём сторонам другого треугольника, то эти треугольники подобны. Но что значит «треугольники подобны»? Это значит, что *существует* преобразование подобия, переводящее один из этих треугольников в другой. Таким образом, подлинный смысл этого признака подобия треугольников состоит в том, что если три стороны одного треугольника пропорциональны трём сторонам другого треугольника, то *существует* преобразование подобия, переводящее один их этих треугольников в другой. Как видим, — типичный признак существования. Предлагаем читателю самостоятельно отыскать в школьных учебниках математики ещё несколько теорем существования в явном или завуалированном виде и определить, насколько полно они доказаны.

4. Задачи о рыцарях и лжецах при изучении логики кванторов

В научно-популярной литературе имеется немало задач о рыцарях и лжецах. Практически все они — на логические союзы. Автору посчастливилось составить более 40 задач о рыцарях и лжецах на кванторы. Здесь приводятся 15 из них, организованные в виде рассказа о пребывании путешественника на Острове Рыцарей и Лжецов.

Напомним, что каждый житель Острова Рыцарей и Лжецов (далее просто Острова) является либо рыцарем, либо лжецом. Рыцари всегда говорят правду, лжецы — только ложь.

Задачи

1. Первого из жителей, встретившихся мне на Острове, звали A. Я спросил у него, много ли лжецов на Острове. Он ответил: «Хотя бы один лжец на Острове есть».

   Кем был A, рыцарем или лжецом? Есть ли среди жителей Острова хотя бы одни рыцарь? Хотя бы один лжец? Может быть, все жители Острова являются рыцарями? Или все — лжецами?

2. Другой житель острова, B, был более категоричен. Он сказал: «Мы все — лжецы».

   Кем был B, рыцарем или лжецом? Ответьте также на остальные вопросы, поставленные в задаче 1.

3. Житель Острова C сказал мне: «Я — лжец, но есть и рыцари».

   Кем был C, рыцарем или лжецом? Каковы ответы на остальные вопросы, поставленные в задаче 1?

4. В этой задаче — два персонажа, A и B (не обязательно — те же, что в предыдущих задачах). A говорит: «Все жители Острова — рыцари». На что B отвечает: «Ты лжёшь!».

   Кто A— рыцарь или лжец? Кто — B? К каким выводам относительно наличия рыцарей и лжецов среди жителей Острова приводят данные задачи?

5. Снова — два персонажа. A говорит: «B — лжец!». B отвечает (то ли с гордостью, то ли намекая на A): «Есть лжецы на нашим Острове!».

   Вопросы — те же, что и в задаче 4.

6. И в этой задаче — двое действующих лиц. A говорит: «Все, кроме меня, — лжецы!». B поддакивает: «Это точно!».

   Вопросы — те же.

7. Однажды, во время прогулки по Острову, мне встретилась большая группа жителей Острова, дружно скандировавших: «Среди нас лжецов нет!». Сопровождавший меня житель Острова A сказал мне: «Если среди них нет лжецов, то я — лжец».

   Кем был A, рыцарем или лжецом? Были ли в описанной группе лжецы? Рыцари?

8. Однажды мне довелось незаметно для присутствующих наблюдать за ходом собрания (все участники которого были жителями Острова). Первым выступил A: «Среди нас есть хотя бы один рыцарь», — сказал он. Затем к микрофону подошёл возмущённый B, который сказал: «Вы все лжецы!».

   Кем был A, рыцарем или лжецом? Кем был B? К каким выводам относительно остальных участников собрания приводят сообщённые мной сведения?

9. На острове разразился экономический кризис. Как водится, стали искать виновных. Депутат Островной Думы (его звали A) сделал по этому поводу два заявления: 1) «Все рыцари виновны»; 2) «Я не виновен».

   Кем был A — рыцарем или лжецом? Был ли он виновен? Все ли рыцари были виновны? Были ли виновные среди лжецов? Можно ли установить по этим данным, были ли виновные среди рыцарей и все ли лжецы были виновны?

10. Мнение депутата B по поводу кризиса было иным: 1) «Ни один рыцарь не виновен»; 2) «Я виновен».

    Кто B — рыцарь или лжец? Виновен ли он? Как обстоят дела с виновностью рыцарей и лжецов (виновны все; виновны некоторые; установить невозможно)?

11. Депутат C был весьма оригинален. Выступая перед лжецами, он сказал: «Все рыцари виновны». А выступая перед рыцарями, он заявил: «Все виновные — лжецы».

Кто C — рыцарь или лжец? Как обстоят дела с виновностью рыцарей? Лжецов?

12. Не менее оригинален был и депутат D, который заявил: 1) «Все виновные — рыцари»; 2) «Все лжецы виновны».

    К каким выводам Вы можете прийти на основании этих данных?

13. Разумеется, не обошлось без обсуждения виновности Президента Острова. Депутат E по этому поводу заявил: 1) «Президент не виновен»; 2) «Все жители Острова виновны».

    Кем был E — рыцарем или лжецом? Виновен ли Президент? Все ли жители Острова виновны?

14. А вот что заявил депутат F: 1) «Президент виновен»; 2) «Хотя бы один житель острова не виновен».

    Кем был F— рыцарем или лжецом? Виновен ли Президент? Как обстоят дела с виновностью остальных жителей Острова?

15. Президент обратился к Правительству Острова. В своём обращении он, в частности, сказал: 1) «Я виновен»; 2) «Если среди вас хотя бы один не виновен, то и я не виновен».

    Кто Президент — рыцарь или лжец? Виновен ли он в кризисе? Как обстоят дела с виновностью членов Правительства?

Педагогические замечания

Чтобы показать, какую роль могут играть эти задачи в обучении владению кванторами, рассмотрим хотя бы первую из приведённых задач. Итак, островитянин, которого зовут A, изрекает: «Хотя бы один лжец на Острове есть», — и требуется по этим данным определить, кто он, рыцарь или лжец, и затем установить, есть ли на Острове рыцари, лжецы, все ли жители являются рыцарями, лжецами.

Решение. Допустим, что A — лжец. Тогда, поскольку лжецы изрекают только ложь, его высказывание

(1) На Острове есть хотя бы один лжец

ложно. Значит истинно отрицание этого высказывания

(2) Неверно, что на Острове есть хотя бы один лжец.

Иначе говоря,

(3) Какого жителя Острова ни возьми, это — не лжец.

Поскольку не лжецами на Острове могут быть лишь рыцари, это означает, что

(4) Какого жителя Острова ни возьми, он — рыцарь.

В частности, тогда и A — рыцарь. Таким образом, допустив, что A — лжец, мы приходим к тому, что A — и лжец, и рыцарь. Это невозможно. Значит, наше предположение неверно и A — не лжец, то есть рыцарь.

Теперь, поскольку A — рыцарь, его высказывание истинно и, тем самым, на Острове есть хотя бы один лжец. Итак, A — рыцарь, значит, на Острове есть хотя бы один рыцарь, а, кроме того, на Острове есть и хотя бы один лжец, так что не все жители Острова являются рыцарями и не все — лжецами.

Комментарий. Введём переменную «x», областью значений которой является множество всех жителей Острова. С этой переменной предложение (1) примет вид:

(1′) $(\exists x)(x$ — лжец$)$.

Отрицание (2) предложения (1) заменится предложением

(2′) $\neg(\exists x)(x$ — лжец$)$

Предложению (3) отвечает предложение «$(\forall x)(x$ — **не** лжец$)$», или, что то же самое,

(3′) $(\forall x)\neg(x$ — лжец$)$,

(где «$\neg(x$ — лжец)», согласно сказанному выше, означает «**неверно, что** (x — лжец)»). В ходе решения мы обнаружили, что предложение (3) означает то же, что и (2) (это мы выразили словами «иначе говоря»). Поскольку (3′) является переводом (3), а (2′) — переводом (2), (3′) означает то же, что и (2′) (сказать, что на Острове нет лжецов, — значит сказать, что, какого жителя Острова ни возьми, он — не лжец). Таким образом,

$$\neg(\exists x)(x \text{ — лжец}) \leftrightarrow (\forall x)\neg(x \text{ — лжец}).$$

Это — проявление общего закона, называемого *законом отрицания подтверждений* и состоящего в том, что, каково бы ни было предложение «$\ldots x \ldots$»,

$$\neg(\exists x)(\ldots x \ldots) \leftrightarrow (\forall x)\neg(\ldots x \ldots).$$

Обосновывается он в точности так же, как и полученное нами в процессе решения задачи его частное проявление. А именно, если не существует такого x, для которого $\ldots x \ldots$, то, какой x ни возьми, окажется неверно, что $\ldots x \ldots$. И обратно, если, какой x ни возьми, неверно, что $\ldots x \ldots$, то такого x, для которого $\ldots x \ldots$, не существует.

Продолжим комментарий. Из предположения «A — лжец» мы вывели предложение (4), или, иначе говоря,

(4) $$(\forall x)(x \text{ — рыцарь}).$$

Отсюда мы заключили, что тогда и A — рыцарь. Тем самым мы неявно признали истинной импликацию

$$\text{если } (\forall x)(x \text{ — рыцарь}), \text{ то } A \text{ — рыцарь}.$$

Это — частный случай *закона конкретизации*, согласно которому, каковы бы ни были предложение «$\ldots x \ldots$» и значение c переменной «x», имеет место импликация

$$\text{если } (\forall x)(\ldots x \ldots), \text{ то } \ldots c \ldots.$$

Этот закон сплошь и рядом (неявно) используется в математике. На нём, в частности, основано применение общих теорем. Например, обнаружив в про-

цессе решения какой-нибудь задачи прямоугольный треугольник, мы без колебаний применяем к нему теорему Пифагора, потому что знаем, что указанное в ней соотношение выполняется для любого прямоугольного треугольника.

Далее, найдя, что A — рыцарь, мы совершенно справедливо заключили, что на Острове есть хотя бы один рыцарь. Иначе говоря, мы были интуитивно убеждены в том, что

$$\text{если } A \text{ — рыцарь, то } (\exists x)(x \text{ — рыцарь}).$$

Здесь мы действовали в соответствии с *законом обоснования подтверждений*, согласно которому, каковы бы ни были предложение «$\dots x \dots$» и значение c переменной «x», имеет место импликация

$$\text{если } \dots c \dots, \text{ то } (\exists x)(\dots x \dots).$$

Иначе говоря, чтобы доказать, что существует x, для которого $\dots x \dots$, достаточно указать какое-нибудь значение c переменной «x», для которого $\dots c \dots$. В математике очень часто рассуждают подобным образом. Например, чтобы доказать, что уравнение

$$3x^3 + 5x^2 + 7x + 1 = 3571$$

имеет решение (то есть, что $(\exists x)(3x^3 + 5x^2 + 7x + 1 = 3571)$), достаточно заметить, что $3 \cdot 10^3 + 5 \cdot 10^2 + 7 \cdot 10 + 1 = 3571$.

Наконец, установив, что на Острове есть хотя бы один лжец, мы заключили отсюда, что не все жители острова являются рыцарями. Иначе говоря, из предложения

$$(\exists x)(x \text{ — лжец})$$

мы вывели предложение «$\neg(\forall x)(x$ — рыцарь$)$», то есть

$$\neg(\forall x)\neg(x \text{ — лжец}).$$

Тем самым мы неявно сочли истинной импликацию

$$\text{если } (\exists x)(x \text{ — лжец}), \text{ то } \neg(\forall x)\neg(x \text{ — лжец}).$$

На самом деле верно даже большее:

$$(\exists x)(x \text{ — лжец}) \leftrightarrow \neg(\forall x)\neg(x \text{ — лжец}).$$

Это — частный случай *закона подтверждения через обобщение*, согласно которому, какое бы предложение «$\dots x \dots$» мы ни взяли,

$$(\exists x)(\dots x \dots) \leftrightarrow \neg(\forall x)\neg(\dots x \dots).$$

Обосновывается он весьма просто. В силу закона отрицания подтверждений $\neg(\exists x)(\dots x \dots) \leftrightarrow (\forall x)\neg(\dots x \dots)$. Значит,

$$\neg\neg(\exists x)(\dots x \dots) \leftrightarrow \neg(\forall x)\neg(\dots x \dots).$$

Но

$$\neg\neg(\exists x)(\dots x \dots) \leftrightarrow (\exists x)(\dots x \dots),$$

откуда и получаем требуемое.

Прокомментировав подобным образом решения нескольких первых задач и сформулировав основные законы кванторной логики, мы затем препоручаем анализ и комментарий студентам, и они с этой работой довольно успешно справляются, сначала — с помощью преподавателя, а затем — и самостоятельно.

Остановимся ещё на задаче 2. Эта задача подсказана известной легендой, согласно которой критский философ Эпименид (VI в. до н. э.) как-то сказал: «Все критяне — лжецы»[2]. Переместив Эпименида с острова Крит на Остров Рыцарей и Лжецов, мы получили содержательную и, как нам кажется, красивую задачу.

Поскольку сам Эпименид был критянином, из его высказывания следует, что и он — лжец. Стало быть, его высказывание ложно и, тем самым, не все критяне — лжецы. Изречение Эпименида иногда называют парадоксом (неразрешимым противоречием). Это было бы верно, если бы наряду с выводом из предложения «Все критяне — лжецы» предложения «Не все критяне — лжецы» существовал вывод в обратном направлении, первого предложения

[2] Критяне — это жители острова Крит

из второго, чего на самом деле нет. Таким образом, подлинного парадокса мы здесь не имеем, хотя тот факт, что из предложения «Все критяне — лжецы» следует (в описанной ситуации) предложение «Не все критяне — лжецы», имеет некоторый налёт парадоксальности.

5. Геометрическая интерпретация кванторов

Посмотрим на проблему квантификации с геометрической точки зрения. Попытаемся обнаружить связь между графиком данного предложения и графиком его обобщения или подтверждения. Нам будет удобнее начать с подтверждений.

Рассмотрим предложение

$$x^3 + xy^2 \geqslant 4x. \tag{1}$$

В нём две свободных переменных, поэтому его график G представляет собой некоторую фигуру на координатной плоскости, а именно — геометрическое место точек $P(x,\ y)$, координаты x и y которых удовлетворяют условию (1). Иными словами, каковы бы ни были действительные числа x и y,

$$P(x,\ y) \in G \leftrightarrow x^3 + xy^2 \geqslant 4x. \tag{2}$$

Эта фигура G изображена на рисунке 1.

Теперь рассмотрим подтверждение

$$(\exists y)(x^3 + xy^2 \geqslant 4x). \tag{3}$$

предложения (1) по переменной ‘y’, и попытаемся связать его график G_1 с графиком G предложения (1). В предложении (3) только одна свободная переменная, ‘x’, поэтому G_1 есть фигура не на координатной *плоскости*, а на координатной *прямой*. Эта фигура состоит из тех и только тех точек $P_1(x)$, для которых выполняется предложение (3). Иначе говоря, каково бы ни было действительное число x,

$$P_1(x) \in G_1 \leftrightarrow (\exists y)(x^3 + xy^2 \geqslant 4x).$$

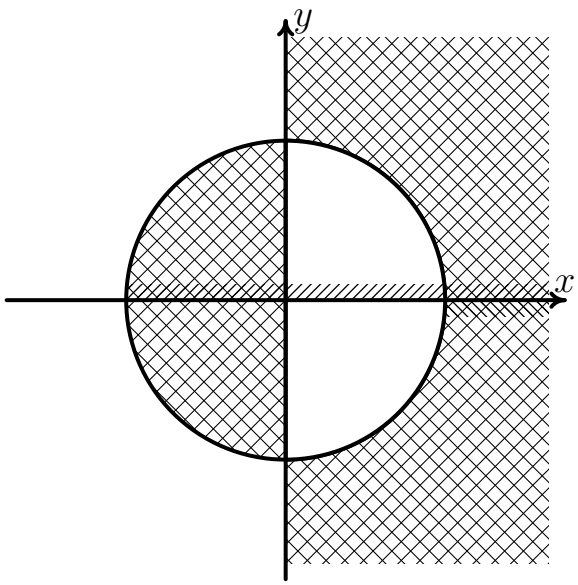


Рис. 1:

В силу (2) это означает, что

$$P_1(x) \in G_1 \leftrightarrow (\exists y)(P(x,\ y) \in G).$$

Но все точки $P(x,\ y)$ с данным x лежат на вертикальной прямой, проходящей через точку $P_1(x)$ на оси абсцисс. Значит, $P_1(x) \in G_1$ тогда и только тогда, когда на вертикальной прямой, проходящей через точку $P_1(x)$, есть хотя бы одна точка графика G, то есть, когда вертикальная прямая, проходящая через точку $P_1(x)$, пересекает график G предложения (1). Поскольку, с другой стороны, $P_1(x)$ есть проекция всех точек $P(x,\ y)$ с данным x на ось абсцисс, это означает, что точка оси абсцисс принадлежит графику предложения (3) в точности тогда, когда она является проекцией на ось абсцисс хотя бы одной точки графика предложения (1). Таким образом, график предложения (3) представляет собой проекцию графика предложения (1) на ось абсцисс. На приведённом выше рисунке эта проекция представлена частью оси абсцисс, покрытой штриховкой сверху.

Совершенно аналогично обстоят дела для подтверждений любых других предложений с двумя свободными переменными. Чтобы внести в этот вывод упоминание о подкванторной переменной, сформулируем его чуть иначе:

> график подтверждения ‘$(\exists y)(\ldots x \ldots y \ldots)$’ предложения ‘$\ldots x \ldots y \ldots$’
> по переменной ‘y’ является проекцией графика предложения ‘$\ldots x \ldots y \ldots$’

параллельно оси, по которой откладывается переменная ‘y’, на прямую, определяемую условием ‘$y = 0$’.

Если в предложении не две, а три свободных переменных, его график представляет собой фигуру в координатном *пространстве*, а условие ‘$y = 0$’ определяет не прямую, а *плоскость*. В остальном приведённая формулировка остаётся без изменений. Разумеется, вместо ‘x’ и ‘y’ могут быть любые другие различные переменные.

А теперь рассмотрим обобщение

$$(\forall y)(x^3 + xy^2 \geqslant 4x) \tag{4}$$

предложения (1) по переменной ‘y’. Чтобы число x удовлетворяло предложению (4), нужно, чтобы *все* упорядоченные пары $(x,\ y)$ с данным x удовлетворяли предложению (1). То есть — чтобы все точки $P(x,\ y)$ с данной абсциссой x принадлежали графику предложения (1). Таким числам x отвечают те точки $P_1(x)$ оси абсцисс, через которые проходят вертикальные прямые, целиком содержащиеся в графике G предложения (1). Чтобы получить все такие точки оси абсцисс, нужно провести все вертикальные прямые, целиком содержащиеся в этом графике, и найти их точки пересечения с осью абсцисс. Получится часть G_1^∞ проекции G_1 фигуры G, называемая *внутренней проекцией* фигуры G. Таким образом, график предложения (4) является внутренней проекцией графика предложения (1) вдоль оси, по которой откладывается переменная ‘y’, на прямую, определяемую условием ‘$y = 0$’. На рис. 1 эта внутренняя проекция представлена началом координат и частью оси абсцисс, покрытой штриховкой снизу.

Аналогично обстоят дела для любых других предложений с двумя свободными переменными:

> график обобщения ‘$(\forall y)(\ldots x \ldots y \ldots)$’ предложения ‘$\ldots x \ldots y \ldots$’ по переменной ‘$y$’ является внутренней проекцией графика предложения ‘$\ldots x \ldots y \ldots$’ параллельно оси, по которой откладывается переменная ‘y’, на прямую, определяемую условием ‘$y = 0$’.

В случае трёх свободных переменных в эту формулировку вносятся естественные (незначительные) изменения.

Таким образом,

> квантору существования отвечает проецирование вдоль оси, по которой откладывается подкванторная переменная, квантору всеобщности — внутреннее проецирование.

В этом состоит, как говорят, ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СМЫСЛ КВАНТОРОВ.

Последовательно применяя полученные результаты, можно исследовать предложения с несколькими кванторами. Выясним, например, истинно или ложно высказывание

$$(\exists x)(\forall y)(x^3 + xy^2 \geqslant 4x).^{3} \tag{5}$$

В силу сказанного выше вопрос сводится к тому, чтобы выяснить, существует ли на оси абсцисс хотя бы одна точка, являющаяся внутренней проекцией графика предложения (1) вдоль оси ординат. Мы уже нашли указанную внутреннюю проекцию и убедились в том, что такие точки существуют. Значит, высказывание (5) истинно.

Разумеется, истинность высказывания (5) можно было установить и иначе, просто заметив, что при $x = 0$ предложение (1) выполняется для любого y. Но часто бывает и наоборот, когда подметить что-нибудь аналитически не очень просто, в то время как геометрический подход делает решение очевидным.

Выясним, например, истинно или ложно высказывание

$$(\exists x)(\forall y)(x^2 - y^2 - 2x + 2y \geqslant 0). \tag{6}$$

Можно заметить, что, если $y = 1$, то, для любого x, $x^2 - y^2 - 2x + 2y = x^2 - 2x + 1 \geqslant 0$. Однако подметить это не слишком просто. В то же время геометрические соображения делают наличие требуемого x очевидным. Действительно, изобразив график предложения

$$x^2 - y^2 - 2x + 2y \geqslant 0 \tag{7}$$

(см. рис. 2), мы тотчас же обнаруживаем горизонтальную прямую, целиком содержащуюся в этом графике. Значит, внутренняя проекция графика предложения (7) вдоль оси абсцисс непуста и, тем самым, высказывание (6) истинно.

[3] Почему мы назвали это предложение высказыванием?

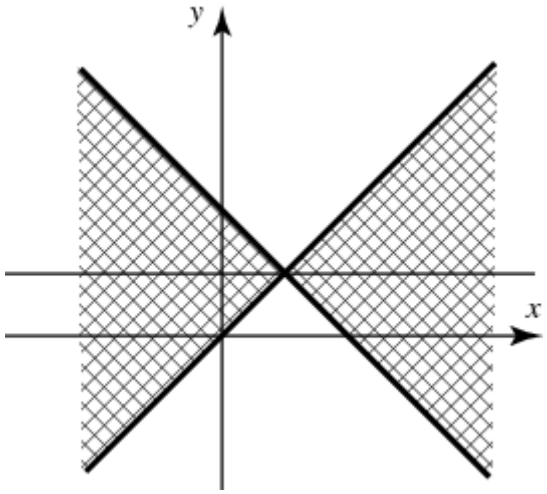


Рис. 2:

Упражнения

1. Изобразите ГМТ $P(p,\ q)$, для которых

$$(\exists x)(x^2 + px + q = 0).$$

2. При каких p

$$(\exists q)(\exists x)(x^2 + px + q = 0)?$$

3. Верно ли, что

$$(\exists p)(\exists q)(\exists x)(x^2 + px + q = 0)?$$
$$(\forall p)(\exists q)(\exists x)(x^2 + px + q = 0)?$$

4. При каких p

$$(\forall q)(\exists x)(x^2 + px + q = 0)?$$

5. Верно ли, что

$$(\forall p)(\forall q)(\exists x)(x^2 + px + q = 0)?$$
$$(\exists p)(\forall q)(\exists x)(x^2 + px + q = 0)?$$

6. При каких q

$$(\exists p)(\exists x)(x^2 + px + q = 0)?$$

7. Верно ли, что

$$(\forall q)(\exists p)(\exists x)(x^2 + px + q = 0)?$$
$$(\exists q)(\exists p)(\exists x)(x^2 + px + q = 0)?$$

8. При каких q

$$(\forall p)(\exists x)(x^2 + px + q = 0)?$$

9. Верно ли, что

$$(\exists q)(\forall p)(\exists x)(x^2 + px + q = 0)?$$
$$(\forall q)(\forall p)(\exists x)(x^2 + px + q = 0)?$$

10. Изобразите ГМТ $P(p, q)$, для которых

$$(\forall x)(x^2 + px + q \geqslant 0).$$

11. Покажите геометрически, что

$$(\forall p)(\exists q)(\forall x)(x^2 + px + q \geqslant 0),$$

но

$$\neg(\exists p)(\forall q)(\forall x)(x^2 + px + q \geqslant 0).$$

12. Найдите множество всех q, для которых

$$(\exists p)(\forall x)(x^2 + px + q \geqslant 0).$$

13. Покажите геометрически, что

$$(\exists q)(\exists p)(\forall x)(x^2 + px + q \geqslant 0),$$

но

$$\neg(\forall q)(\exists p)(\forall x)(x^2 + px + q \geqslant 0).$$

14. Изобразите ГМТ $P(x, y)$, для которых

$$x^2 - xy + 1 = 0.$$

15. Найдите множество всех x, для которых

$$(\exists y)(x^2 - xy + 1 = 0).$$

16. Верно ли, что

$$(\forall x)(\exists y)(x^2 - xy + 1 = 0)?$$

17. Найдите множество всех y, для которых

$$(\exists x)(x^2 - xy + 1 = 0).$$

18. Верно ли, что:

$$(\exists y)(\exists x)(x^2 - xy + 1 = 0)?$$
$$(\forall y)(\exists x)(x^2 - xy + 1 = 0)?$$

19. Изобразите ГМТ $P(x, y)$, для которых

$$x^2 - xy + 1 \geqslant 0.$$

20. Найдите множество всех y, для которых

$$(\exists x)(x^2 - xy + 1 \geqslant 0).$$

21. Верно ли, что:

$$(\exists y)(\exists x)(x^2 - xy + 1 \geqslant 0)?$$
$$(\forall y)(\exists x)(x^2 - xy + 1 \geqslant 0)?$$

22. Найдите множество всех y, для которых

$$(\forall x)(x^2 - xy + 1 \geqslant 0).$$

23. Верно ли, что:

$$(\exists y)(\forall x)(x^2 - xy + 1 \geqslant 0)?$$
$$(\forall y)(\forall x)(x^2 - xy + 1 \geqslant 0)?$$

6. Некоторые законы логики кванторов

Когда хотят привести пример предложения, верного в силу своей логической структуры, чаще всего указывают на импликацию

Если каждый человек смертен *и* Сократ — человек,
то Сократ смертен.

Она иллюстрирует следующий закон, который мы приведём в качестве первого закона логики кванторов.

1. Закон специализации
Каковы бы ни были предложение '$\dots x \dots$' и значение ξ переменной 'x', имеет место импликация

$$(\forall x)(\dots x \dots) \to \dots \xi \dots .$$

Этот закон сплошь и рядом (неявно) используется в математике. На нём, в частности, основано применение общих теорем. Например, обнаружив в процессе решения какой-нибудь задачи прямоугольный треугольник, мы без колебаний применяем к нему теорему Пифагора, потому что знаем, что указанное в ней соотношение выполняется *для любого* прямоугольного треугольника. Рассмотрим ещё примеры.

Пример 1. *Докажите, что*

$$\text{если } (\forall x)(y \leqslant x^2 - 5x + 6), \text{ то } y \leqslant -\tfrac{1}{4}.$$

Решение. Пусть $(\forall x)(y \leqslant x^2 - 5x + 6)$, то есть при всех x выполняется неравенство

$$y \leqslant x^2 - 5x + 6.$$

Тогда оно, в частности, выполняется и при $x = -\frac{5}{2}$ (это — абсцисса вершины параболы $y = x^2 - 5x + 6$, то есть точка, в которой рассматриваемый квадратный трёхчлен принимает наименьшее значение). Значит,

$$y \leqslant \left(-\frac{5}{2}\right)^2 - 5\left(\frac{5}{2}\right) + 6 = -\frac{1}{4}.$$

Пример 2. *Какой знак имеет число* $\sin 2350^\circ$*?*

Решение. $2350 = 6 \cdot 360 + 190$. Поэтому $\sin 2350^\circ = \sin 190^\circ$. Угол 190° лежит в третьей четверти. Синусы *всех* углов, лежащих в этой четверти, отрицательны. Значит, $\sin 190^\circ$, а вместе с ним — и $\sin 2350^\circ$, — отрицателен.

Существует столь же фундаментальный закон, связанный с квантором существования. Это

2. Закон обоснования подтверждений

Каковы бы ни были предложение '$\ldots y \ldots$' и значение ζ переменной y, имеет место импликация

$$\ldots\zeta\ldots \to (\exists y)(\ldots y \ldots).$$

И этот закон многократно неявно использовался нами ранее. Например, решая задачу о рыцарях и лжецах и установив, что A — рыцарь, мы совершенно справедливо заключили, что на Острове есть хотя бы один рыцарь. Иначе говоря, мы были интуитивно убеждены в том, что справедлива импликация

$$\text{если } A \text{ — рыцарь, то } (\exists x)(x \text{ — рыцарь}),$$

— то есть неявно использовали закон обоснования подтверждения.

В силу этого закона, чтобы доказать, что существует x, для которого $\ldots x \ldots$, достаточно указать какое-нибудь значение ζ переменной 'x', для которого $\ldots\zeta\ldots$. В математике очень часто рассуждают подобным образом. Например, чтобы доказать, что уравнение

$$3x^3 + 5x^2 + 7x + 1 = 3571$$

имеет решение, то есть, что

$$(\exists x)(3x^3 + 5x^2 + 7x + 1 = 3571),$$

достаточно заметить, что $3 \cdot 10^3 + 5 \cdot 10^2 + 7 \cdot 10 + 1 = 3571$. Приведём более сложный пример.

Пример 3. *Докажите, что для функции, определённой равенством*

$$y = x^2,$$

существует первообразная на промежутке $(-\infty,\ +\infty)$.

Решение. Определим функцию F на $\mathbb{R}$ условием

$$F(x) = -\frac{1}{3}x^3.$$

Тогда, для любого $x \in (-\infty,\ +\infty)$, имеем:

$$F'(x) = \left(\frac{x^3}{3}\right)' = \frac{1}{3}(x^3)' = \frac{1}{3}\cdot 3x^2 = x^2 = f(x).$$

Это показывает, что F является первообразной для f на рассматриваемом интервале. Значит, искомая первообразная действительно существует.

Продолжим рассмотрение законов логики кванторов. Мы ввели кванторы всеобщности и существования независимо друг от друга. Однако между ними имеется связь, причём — настолько тесная, что можно было бы ограничиться каким-нибудь одним из них. Более того, эта связь уже неявно использовалась нами в доказательствах предложений из главы 1 и ряде упражнений.

Припомним, например, как мы доказывали, что для 0 не существует обратного среди действительных чисел. Мы заметили, что для любого действительного числа y произведение $0 \cdot y$ равно нулю и, стало быть, не равно единице. Тем самым мы обнаружили, что, какое бы число мы ни взяли, оно не является обратным к 0. Отсюда мы сделали вывод, что обратного для 0 нет.

А вот как мы доказывали, что в $\mathbb{R}$ нет наибольшего числа. Мы заметили, что, каково бы ни было число y, $y + 1 < y$. Получается, что, какое число ни возьми, оно — не наибольшее. Это мы и расценили как свидетельство того, что наибольшего числа нет.

Проанализируем эти доказательства. В обоих случаях требовалось доказать предложения вида ‘$\neg(\exists y)(\ldots y \ldots)$’, а вместо этого доказывали ‘$(\forall y)\neg(\ldots y \ldots)$’. Но при этом были убеждены, что доказали именно то, что требуется. Иначе говоря, мы интуитивно были уверены в том, что предложения

‘$\neg(\exists y)(\ldots y \ldots)$’ и ‘$(\forall y)\neg(\ldots y \ldots)$’

эквивалентны. Так и есть на самом деле. В этом и состоит

3. Закон отрицания подтверждений

Отрицание подтверждения эквивалентно обобщению отрицания. Иначе

говоря, каково бы ни было предложение '…y…', имеет место эквиваленция

$$\neg(\exists y)(\ldots y\ldots) \leftrightarrow (\forall y)\neg(\ldots y\ldots).$$

Обоснование этого закона почти дословно повторяет приведённые выше рассуждения и оставляется на долю читателя.

Из закона отрицания подтверждений, навешивая на обе части эквиваленции знаки отрицания и вспоминая закон двойного отрицания, получаем

4. Закон подтверждения через обобщение

Подтверждение эквивалентно отрицанию обобщения отрицания. Иначе говоря, каково бы ни было предложение '…y…', имеет место эквиваленция

$$(\exists y)(\ldots y\ldots) \leftrightarrow \neg(\forall y)\neg(\ldots y\ldots).$$

Далее, в силу произвольности предложения '…y…', эта эквиваленция имеет место и в том случае, если взять в ней вместо предложения '…y…' его отрицание '$\neg(\ldots y\ldots)$'. Это даст нам эквиваленцию

$$(\exists y)\neg(\ldots y\ldots) \leftrightarrow \neg(\forall y)\neg\neg(\ldots y\ldots).$$

Из неё, применяя опять закон второго отрицания и меняя местами члены эквиваленции, получаем

5. Закон отрицания обобщения

Отрицание обобщения эквивалентно подтверждению отрицания. Иначе говоря, каково бы ни было предложение '…y…', имеет место эквиваленция

$$\neg(\forall y)(\ldots y\ldots) \leftrightarrow (\exists y)\neg(\ldots y\ldots).$$

Наконец, навешивая на обе части этой эквиваленции знаки отрицания и применяя закон второго отрицания, получаем

6. Закон обобщения через подтверждение

Обобщение эквивалентно отрицанию подтверждения отрицания. Иначе говоря, каково бы ни было предложение '…y…', имеет место эквиваленция

$$(\forall y)(\ldots y\ldots) \leftrightarrow \neg(\exists y)\neg(\ldots y\ldots).$$

Примеры 1. На основании закона отрицания обобщения

(Не существует честных политиков) $\leftrightarrow$ *(Все политики не честны).*

На основании закона подтверждения через обобщение

(Существуют честные политики) $\leftrightarrow$ *(Не все политики не честны).*

На основании закона отрицания обобщения

(Не все политики честны) $\leftrightarrow$ *(Некоторые политики не честны).*

Наконец, на основании закона обобщения через подтверждение

(Все политики честны) $\leftrightarrow$ *(Не существует не честных политиков).*

Продолжим рассмотрение законов логики кванторов. Четыре последних закона выражают «взаимоотношения» между кванторами и знаком отрицания. Теперь мы рассмотрим взаимоотношения между кванторами и другими логическими союзами. Коротко говоря, квантор всеобщности хорошо согласуется со знаком конъюнкции и плохо — со знаком дизъюнкции, а квантор существования хорошо согласуется со знаком дизъюнкции и плохо — со знаком конъюнкции. Переходим к точным формулировкам.

7. Закон обобщения конъюнкции

Обобщение конъюнкции эквивалентно конъюнкции обобщений. Точнее говоря, каковы бы ни были предложения '…y…' и '__y__', имеет место эквиваленция

$$(\forall y)(\ldots y \ldots \wedge __y__) \leftrightarrow (\forall y)(\ldots y \ldots) \wedge (\forall y)(__y__).$$

Обобщение же дизъюнкции не всегда эквивалентно дизъюнкции обобщений. Например, в области действительных чисел,

неверно, что

$$(\forall y)(y < 0 \vee y \geqslant 0) \leftrightarrow (\forall y)(y < 0) \vee (\forall y)(y \geqslant 0),$$

ибо левая часть эквиваленции истинна, а правая — ложна. Но бывает и так, что обобщение дизъюнкции эквивалентно дизъюнкции обобщений, — например, если один из членов дизъюнкции не содержит свободно переменной квантификации (см. упражнения). Во всяком случае, если имеет место дизъюнкция обобщений, то имеет место и обобщение дизъюнкции. Это —

8. Законы обобщения дизъюнкции

Дизъюнкция обобщения сильнее обобщения дизъюнкции. Точнее говоря, каковы бы ни были предложения '. . . y . . .' и '__y__', имеет место импликация

$$(\forall y)(\ldots y \ldots) \vee (\forall y)(__y__) \to (\forall y)(\ldots y \ldots \vee __y__).$$

9. Закон подтверждения дизъюнкции

Подтверждение дизъюнкции эквивалентно дизъюнкции подтверждений. Точнее говоря, каковы бы ни были предложения '. . . y . . .' и '__y__', имеет место эквиваленция

$$(\exists y)(\ldots y \ldots \vee __y__) \leftrightarrow (\exists y)(\ldots y \ldots) \vee (\exists y)(__y__).$$

Подтверждение же конъюнкции не всегда эквивалентно конъюнкции подтверждений. Например, в области действительных чисел,

неверно, что

$$((\exists y)(y < 0 \wedge y \geqslant 0) \leftrightarrow (\exists y)(y < 0) \wedge (\exists y)(y \geqslant 0)),$$

ибо левая часть эквиваленции ложна, а правая — истинна. Но бывает и так, что подтверждение конъюнкции эквивалентно конъюнкции подтверждений — например, если один из членов конъюнкции не содержит свободно переменной квантификации. Во всяком случае, если имеет место подтверждение конъюнкции, то имеет место и конъюнкция подтверждений. Это —

10. Закон подтверждения конъюнкции

Подтверждение конъюнкции сильнее конъюнкции подтверждений. Точнее говоря, каковы бы ни были предложения '. . . y . . .' и '__y__', имеет место импликация

$$(\exists y)(\ldots y \ldots \wedge __y__) \to (\exists y)(\ldots y \ldots) \wedge (\exists y)(__y__).$$

Поскольку импликация представляет собой разновидность дизъюнкции, она хорошо согласуется с подтверждением и хуже — с обобщением.

11. Закон подтверждения импликации

Подтверждение импликации эквивалентно импликации обобщения посылки и подтверждения заключения. Точнее говоря, каковы бы ни были предложения '...y...' и '__y__', имеет место эквиваленция

$$(\exists y)(\ldots y \ldots \to __y__) \leftrightarrow ((\forall y)(\ldots y \ldots) \to (\exists y)(__y__)).$$

Для обобщения импликации в общем случае нет закона, выражаемого эквиваленцией. Имеются лишь импликации.

12. Законы обобщения импликации

Обобщение импликации сильнее импликации обобщений и импликации подтверждений. Точнее говоря, каковы бы ни были предложения '...y...' и '__y__', имеют место импликации

$$(\forall y)(\ldots y \ldots \to __y__) \to ((\forall y)(\ldots y \ldots) \to (\forall y)(__y__));$$
$$(\forall y)(\ldots y \ldots \to __y__) \to ((\exists y)(\ldots y \ldots) \to (\exists y)(__y__)).$$

13. Законы обобщения эквиваленции

Обобщение эквиваленции сильнее эквиваленции обобщений и эквиваленции подтверждений. Точнее говоря, каковы бы ни были предложения '...y...' и '__y__', имеют место импликации

$$(\forall y)(\ldots y \ldots \leftrightarrow __y__) \to ((\forall y)(\ldots y \ldots) \leftrightarrow (\forall y)(__y__));$$
$$(\forall y)(\ldots y \ldots \leftrightarrow __y__) \to ((\exists y)(\ldots y \ldots) \leftrightarrow (\exists y)(__y__)).$$

Для подтверждения эквиваленции подходящего аналога нет.

Мы рассмотрели законы согласования кванторов с логическими союзами. Осталось рассмотреть законы согласования кванторов между собой.

14. Закон перестановочности одноимённых кванторов

Одноимённые кванторы перестановочны. Точнее говоря, каково бы ни было

предложение '$\ldots x \ldots y \ldots$', имеют место эквиваленции

$$(\forall x)(\forall y)(\ldots x \ldots y \ldots) \leftrightarrow (\forall y)(\forall x)(\ldots x \ldots y \ldots);$$
$$(\exists x)(\exists y)(\ldots x \ldots y \ldots) \leftrightarrow (\exists y)(\exists x)(\ldots x \ldots y \ldots).$$

Напротив, разноимённые кванторы в общем случае **не** перестановочны. Например, в области действительных чисел

неверно, что

$$((\forall x)(\exists y)(x + y = 0) \leftrightarrow (\exists y)(\forall x)(x + y = 0)),$$

ибо левая часть эквиваленции истинна, а правая — ложна. Но «в одну сторону» утверждение всегда имеет место.

15. Закон перестановочности разноимённых кванторов

Подтверждение обобщения сильнее обобщения подтверждения. Точнее говоря, каково бы ни было предложение '$\ldots x \ldots y \ldots$', имеет место импликация

$$(\exists x)(\forall y)(\ldots x \ldots y \ldots) \to (\forall y)(\exists x)(\ldots x \ldots y \ldots).$$

В самом деле, пусть имеет место посылка утверждаемой импликации,

$$(\exists x)(\forall y)(\ldots x \ldots y \ldots).$$

Тогда хотя бы для одного значения c переменной 'x' выполняется предложение

$$(\forall y)(\ldots c \ldots y \ldots).$$

Это означает, что при всех y выполняется предложение

$$\ldots c \ldots y \ldots.$$

Значит, в силу закона обоснования подтверждения, при любом y выполняется предложение

$$(\exists x)(\ldots x \ldots y \ldots),$$

а это и означает, что имеет место обобщение

$$(\forall y)(\exists x)(\ldots x \ldots y \ldots).$$

7. Доказательство предложений с различными кванторными приставками

7.1. Обобщения

Пример 4. При изучении действительных чисел доказывают, что произведение любого действительного числа с нулём есть нуль. Напомним доказательство.

> Возьмём произвольное действительное число, скажем, x. Поскольку $0 + 0 = 0$, получаем, что
>
> $$x \cdot 0 = x \cdot (0 + 0) = x \cdot 0 + x \cdot 0, \text{ то есть } x \cdot 0 = x \cdot 0 + x \cdot 0,$$
>
> откуда заключаем, что $x \cdot 0 = 0$. Поскольку x было выбрано произвольно, это справедливо для любых действительных чисел.

Доказательство начинают словами: «Возьмём произвольное действительное число», — заканчивают словами: «Поскольку x было взято произвольно...». Фактически же ничего не берут, а просто доказывают предложение '$x \cdot 0 = 0$' так, чтобы это доказательство было пригодно для всех действительных чисел x. И первая из выделенных нами фраз указывала на намерение доказывать названное предложение именно таким образом, а вторая отмечала, что это намерение выполнено.

Таким образом, выделенные нами фразы пишутся лишь для психологического комфорта, главное же заключается в том, чтобы доказывать стоящее после квантора всеобщности предложение способом, пригодным для любых значений квантифицируемой переменной.

- *Чтобы доказать предложение '$(\forall x)(\ldots x \ldots)$', достаточно доказать предложение '$\ldots x \ldots$' способом, пригодным для всех значений переменной 'x'.*

Рассмотрим более сложный

Пример 5. *Докажите, что при всех* x

$$x^4 - x^3 + x^2 - x + 1 > 0.$$

Поиски решения. Приглядимся к выражению

$$x^4 - x^3 + x^2 - x + 1.$$

Нетрудно заметить, что оно выполняется, если $x \geqslant 1$. Действительно, тогда $x - 1 \geqslant 0$, поэтому

$$x^4 - x^3 = x^3(x-1) \geqslant 0 \quad \text{и} \quad x^2 - x = x(x-1) \geqslant 0,$$

а $1 > 0$. Итак, при $x \geqslant 1$ неравенство (1) выполняется.

Осталось рассмотреть те x, для которых $x < 1$. Для них $-x + 1 = 1 - x > 0$,

$$-x^3 + x^2 = x^2(-x+1) \geqslant 0,$$

и $x^4 \geqslant 0$. Значит, неравенство (1) выполняется и при $x < 1$. Решение найдено.

Прежде чем переписывать его набело, спросим себя: а откуда следует, что неравенство (1) выполняется при всех x? В наших рассуждениях эти слова (‘при всех x’) ни разу не встретились.— Это следует из заложенной в определение системы действительных чисел линейности порядка:

для любых действительных чисел x *и* y,
$x < y$ *или* $x = y$ *или* $x > y$.

В частности, для любого действительного числа x, $x < 1$ или $x = 1$ или $x > 1$, то есть, $x < 1$ или $x \geqslant 1$. После этого без труда записывается «чистовик» решения, который мы здесь опускаем.

Таким образом, на самом деле, доказывая наше обобщение, мы вывели его из другого, уже известного, обобщения. Именно так обычно и доказываются обобщения. Таким образом, приведённое выше правило на самом деле должно быть сформулировано иначе:

> *Чтобы доказать обобщение ‘*$(\forall x)(\ldots x \ldots)$*’, достаточно вывести его из какого-нибудь уже известного обобщения.*

Мы обычно будем использовать первую формулировку, понимая её в соответствии со сделанным сейчас уточнением.

7.2. Подтверждения

Теперь рассмотрим способы доказательства подтверждений. Напомним, что по нашему соглашению подтверждение

$$(\exists x)(\dots x \dots) \tag{2}$$

считается верным, если стоящее после квантора существования предложение '$\dots x \dots$' выполняется хотя бы при одном x. Соответственно этому для доказательства подтверждения (2) достаточно обнаружить хотя бы одно значение переменной, при котором выполняется предложение, стоящее после квантора.

Пример 6. *Докажем, что*

$$(\exists x)(2x + 3 = 1).$$

Решение. Действительно, [пусть $x = -1$, тогда $2x + 3 =$] $2 \cdot (-1) + 3 = 1$. Значит, [предложение '$2x + 3 = 1$' выполняется хотя бы при одном значении переменной 'x', так что, и в самом деле,] $(\exists x)(2x + 3 = 1)$.

Пример 7. *Пусть ω — окружность радиуса 5 с центром в точке O и a — луч с началом в точке O. Докажем, что луч a пересекает окружность ω, т. е. что существует точка, принадлежащая как лучу a, так и окружности ω.*

Решение. Отложим на луче a от его начала отрезок OA длины 5. Тогда точка A принадлежит лучу a (по построению) и окружности ω (ибо удалена от O на расстояние 5). Значит, точка, принадлежащая как лучу a, так и окружности ω, действительно существует.

Эти примеры показывают обычный способ доказательства подтверждений:

- *Чтобы доказать предложение '$(\exists x)(\dots x \dots)$', достаточно указать хотя бы одно значение переменной 'x', при котором выполняется предложение '$\dots x \dots$'.*

Так это обычно формулируют. Но вот вопрос: а что это значит — «указать значение переменной»? Значениями переменных в математике являются абстрактные объекты, а абстрактный объект можно указать не иначе как назвав

его. Осознание этого обстоятельства естественно порождает новый вопрос: откуда мы знаем, что названный нами объект существует? Так мы обнаруживаем, что то, что воспринимается нами как предъявление значения переменной, на самом деле является выводом существования из существования: существования одних объектов из уже известного существования других. И лишь в тех случаях, когда предъявляемые объекты действительно существуют, предъявление доказывает существование, в противном же случае оно ничего не доказывает.

Пример 8. *«Докажем», что уравнение*

$$\left(\sqrt{3-2\sqrt{2}}-\sqrt{2}+1\right)\cdot x+3=5$$

имеет решение (то есть существует действительное число x, удовлетворяющее приведённому равенству).

«Доказательство». Положим

$$x=\frac{2}{\sqrt{3-2\sqrt{2}}-\sqrt{2}+1}.$$

Тогда

$$\begin{aligned}
&(\sqrt{3-2\sqrt{2}}-\sqrt{2}+1)\cdot x+3\\
=\;&(\sqrt{3-2\sqrt{2}}-\sqrt{2}+1)\cdot\frac{2}{\sqrt{3-2\sqrt{2}}-\sqrt{2}+1}+3\\
=\;&2+3\\
=\;&5.
\end{aligned}$$

Доказано существование требуемого x? Нет! Почему? Потому, что «предъявленного» числа не существует! Действительно,

$$\begin{aligned}
\sqrt{3-2\sqrt{2}}&=\sqrt{2-2\sqrt{2}+1}\\
&=\sqrt{(\sqrt{2}-1)^2}\\
&=\sqrt{2}-1,
\end{aligned}$$

так что $\sqrt{3-2\sqrt{2}}-\sqrt{2}+1=0$!

Учитывая сказанное, получаем следующее уточнение правила обоснования подтверждений.

Чтобы доказать подтверждение, достаточно вывести его из какого-нибудь уже установленного подтверждения.

Мы обычно будем пользоваться первой формулировкой, понимая её в соответствии со сделанным сейчас уточнением.

7.3. Подтверждения обобщений

Пример 9. *Докажем, что*

$$(\exists y)(\forall x)(x^2 + 2xy + 1 \geqslant 0). \tag{3}$$

Поиски решения. Согласно сказанному выше для доказательства данного предложения достаточно указать хотя бы одно y, при котором выполняется предложение

$$(\forall x)(x^2 + 2xy + 1 \geqslant 0).$$

В качестве такого y подойдёт, например, 1. Чтобы убедиться в этом, нужно доказать, что

$$(\forall x)(x^2 + 2x + 1 \geqslant 0).$$

Сделать это совсем нетрудно. Действительно, при любом x,

$$x^2 + 2x + 1 = (x + 1)^2,$$

а квадрат любого действительного числа неотрицателен. Решение найдено. Оформим его.

Решение. Пусть $y = -1$. Тогда, для любого x,

$$x^2 + 2xy + 1 = x^2 + 2x + 1 = (x + 1)^2 \geqslant 0.$$

[Значит, существует такое y, что, для любого x, $x^2 + 2xy + 1 \geqslant 0$.] Это и требовалось доказать.

7.4. Обобщения подтверждений

Пример 10. *Докажем, что*

$$(\forall x)(\exists y)(x^2 + xy = 0). \tag{4}$$

Для доказательства этого предложения нужно доказать предложение

$$(\exists y)(x^2 + xy = 0)$$

способом, охватывающим все значения x. Рассмотрим произвольное значение x. (Для психологического комфорта можно обозначить это значение через x_0. Мы не делаем этого, ибо 'x_0' — такая же переменная, как и 'x'.) Теперь, когда значение x фиксировано, нужно подобрать такое y, чтобы выполнялось равенство

$$x^2 + xy = 0.$$

В качестве нужного y подойдёт $-x$. Действительно, если $y = -x$, то

$$x^2 + xy = x^2 + x(-x) = x^2 - x^2 = 0,$$

что и требовалось. Мы приходим к следующему решению.

Решение. Рассмотрим произвольное значение x. Положим $y = -x$. Тогда

$$x^2 + xy = x^2 + x(-x) = x^2 - x^2 = 0.$$

[Значит, для любого x существует такое y, при котором $x^2 + xy = 0$.] Это и требовалось доказать.

Замечание. Обратим внимание на различие между двумя последними доказательствами. В первом из них мы указали такое число y, которое *одно в сочетании со всеми* числами x удовлетворяет рассматриваемому предложению. Во втором же *для каждого x подбиралось* своё y, зависящее от x. «Универсального» же y, которое бы одно в сочетании со всеми x удовлетворяло предложению '$x^2 + xy = 0$' — нет. Действительно, при $x = 1$ требуемое y удовлетворяет условию

$$1^2 + 1 \cdot y = 0, \text{т. е.} y = -1,$$

а при $x = 2$ оно удовлетворяет условию

$$2^2 + 2 \cdot y = 0, \text{т. е.} y = 2.$$

Таким образом, в отличие от предложения (4), предложение

$$(\exists y)(\forall x)(x^2 + xy = 0)$$

ложно. Это показывает, что

порядок разноимённых кванторов в предложении существен:
поменяв кванторы местами,
мы можем из верного предложения получить неверное.

Не следует, конечно, думать, что так бывает всегда. Встречаются и предложения, «безразличные» к порядку кванторов. Например, поменяв местами кванторы в предложении (3), мы получим предложение

$$(\forall x)(\exists y)(x^2 + 2xy + 1 \geqslant 0),$$

которое тоже истинно. Причина понятна: если «есть универсальное» число y, в сочетании со всеми x удовлетворяющее предложению, то для каждого x можно подобрать y так, чтобы образовавшаяся пара удовлетворяла предложению, просто в качестве «подбираемого» y каждый раз будет браться одно и то же «универсальное» число.

Представьте себе компьютерный класс с принтерами нескольких марок. Если у Вас есть драйвер, пригодный для всех этих принтеров, то и для каждого принтера у Вас есть подходящий к нему драйвер.

7.5. Предложения с «кванторными зигзагами»

Пример 11. *Докажем, что*

$$(\forall x)(\exists y)(\forall z)(z^2 + xz + yz \geqslant 0).$$

Решение. Рассмотрим произвольное значение x. Положим $y = -x$. Тогда, при любом z будем иметь:

$$\begin{aligned} z^2 + xz + yz &= z^2 + xz + z(-x) \\ &= z^2 + 0 \\ &= z^2 \\ &\geqslant 0. \end{aligned}$$

В заключение этого параграфа рассмотрим «настоящий» пример.

Пример 12. *Докажем, что*

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x)(|x-1| < \delta \to |x^2 - 1| < \varepsilon).$$

Замечание. Это предложение выражает непрерывность квадратичной функции в точке 1. Для него существуют различные доказательства. Мы приведём доказательство, в котором используется существование квадратный корней из положительных действительных чисел. Предупреждаем об этом потому, что имеются тексты, в которых сначала с помощью корней доказывается непрерывность квадратичной функции (или, более общо, степенной функции с целым показателем), а затем из непрерывности указанной функции выводится существование корней!

Поиски решения. Требуется для каждого $\varepsilon > 0$ подобрать такое $\delta > 0$, чтобы при любом x имела место импликация

$$|x-1| < \delta \to |x^2 - 1| < \varepsilon.$$

Пусть $\varepsilon > 0$. Чтобы найти подходящее δ, выразим $|x^2 - 1|$ через $|x - 1|$ и попытаемся получить ограничение на δ, преобразуя неравенство '$|x^2 - 1| < \varepsilon$'. Начинаем. Для любого x имеем:

$$\begin{aligned} |x^2 - 1| &= |(x-1)(x+1)| \\ &= |(x-1)((x-1)+2)| \\ &= |(x-1)^2 + 2(x-1)| \\ &\leqslant |x-1|^2 + 2|x-1|. \end{aligned}$$

Поэтому

$$\begin{aligned}
|x^2-1|<\varepsilon &\leftarrow |x-1|^2+2|x-1|<\varepsilon \\
&\leftrightarrow |x-1|^2+2|x-1|+1<1+\varepsilon \\
&\leftrightarrow (|x-1|+1)^2<1+\varepsilon \\
&\leftrightarrow |x-1|+1<\sqrt{1+\varepsilon} \\
&\leftrightarrow |x-1|<\sqrt{1+\varepsilon}-1.
\end{aligned}$$

Отсюда ясно, что в качестве требуемого δ подойдёт $\sqrt{1+\varepsilon}-1$.

Доказательство. Пусть $\varepsilon>0$. Положим $\delta=\sqrt{1+\varepsilon}-1$. Покажем, что, для любого x, если $|x-1|<\delta$, то $|x^2-1|<\varepsilon$.

Пусть $|x-1|<\delta$, т. е. $|x-1|<\sqrt{1+\varepsilon}-1$. Тогда

$$\begin{aligned}
|x^2-1| &= |(x-1)(x+1)| \\
&= |(x-1)((x-1)+2)| \\
&= |(x-1)^2+2(x-1)| \\
&\leqslant |x-1|^2+2|x-1| \\
&= |x-1|^2+2|x-1|+1-1 \\
&= (|x-1|+1)^2-1 \\
&< ((\sqrt{1+\varepsilon}-1)+1)^2-1 \\
&= \left(\sqrt{1+\varepsilon}\right)^2-1 \\
&= 1+\varepsilon-1 \\
&= \varepsilon,
\end{aligned}$$

Так что действительно $|x^2-1|<\varepsilon$. Это и требовалось доказать.

Упражнения

Докажите, что:

1. $(\forall x)(x^2 + 1 \geqslant 2x)$;

2. $(\forall x)(x > 1 \to x^2 > x)$;

3. $(\forall x)(0 < x < 1 \to x^2 < x)$;

4. $(\forall x)(x^4 - x^3 + x^2 - x + 1 \geqslant 0)$;

5. $(\forall x)(\forall y)(x^2 + 2xy + 3y^2 + 2x + 6y + 4 > 0)$;

6. $(\forall x)(\forall y)(x - y \geqslant 4 \to x^2 - 5x \geqslant y - 5)$;

7. $(\exists x)(2x + 3 = 7)$;

8. $(\exists x)(-2x > 1)$;

9. $(\exists x)(x^2 - 2x > 0)$;

10. $(\exists x)(x + \frac{1}{x} = 5,2)$;

11. $(\exists x)(x^2 = 2)$;

12. $(\exists x)(2x = 3)$;

13. $(\exists x)(4x^3 + 3x^2 + 2x + 1 = 4321)$;

14. $(\exists x)(3x + 4x = 7x)$;

15. $(\exists x)(3x + 4x = 5x)$;

16. $(\exists x)\left(\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x + \left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^x = 2^x\right)$;

17. $(\forall x)(\exists y)(x + y = 0)$;

18. $(\forall x)(\exists y)(x + y = 1)$;

19. $(\forall x)(\exists y)(2x - 3y = 5)$;

20. $(\forall x)(\exists y)(2x + 3y < 5)$;

21. $(\forall x)(\exists y)(x \cdot y < 1)$;

22. $(\forall x)(\exists y)(x^2 + 2xy \geqslant 0)$;

23. $(\forall x)(\exists y)(x^2 + xy - 2y^2 = 0)$;

24. $(\forall x)(\exists y)(2x^2 + xy \leqslant 0)$;

25. $(\exists y)(\forall x)(xy = 0)$;

26. $(\exists y)(\forall x)(y \leqslant x^2)$;

27. $(\exists y)(\forall x)(y \leqslant \sin x)$;

28. $(\exists y)(\forall x)(\sin y \leqslant \sin x)$;

29. $(\exists y)(\forall x)(y \leqslant x^2 + 2x)$;

30. $(\exists a)(\forall y)(y > a \to y^2 > y)$;

31. $(\exists a)(\forall x)(x < a \to x^2 + x - 5 > 0)$;

32. $(\exists y)(\forall x)(|y - x^2| \geqslant 2)$;

33. $(\forall p)(\exists q)(\forall x)(x^2 + px + q \geqslant 0)$;

34. $(\forall x)(\exists y)(\forall z)(z^2 + xz + yz \geqslant 0)$;

35. $(\forall x)(\exists y)(\forall z)(xy + yz + zx \leqslant 0)$;

36. $(\forall x)(\exists y)(\forall z)(1999xy + 2000yz + 2001zx \leqslant 0)$;

37. $(\forall a)(\exists b)(\forall z)(z < b \to 2x + 3 < a)$;

38. $(\forall a)(\exists b)(\forall z)(z < b \to z^2 > a)$;

39. $(\forall a)(\exists b)(\forall x)(x < b \to (x - 2a)(x + 3a)$;

40. $(\forall a)(\forall b)(\exists c)(\forall x)(x < c \to (x - a)(x - b) > 0)$;

41. $(\forall b)(\exists c)(\forall a)(a < c \to a^2 + ab - 2b^2 > 0)$;

42. $(\forall a)(\exists c)(\forall b)(b < c \to a^2 + ab - 2b^2 < 0)$.

43. $(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x)(|x - c| < \delta \to |x^2 - c^2| < \varepsilon)$:
а) при $c = 0,\ -1,\ 2,\ -2$; б) при произвольном c.

44. $(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x)(|x - c| < \delta \to |x^3 - c^3| < \varepsilon)$:
а) при $c = 0,\ -1,\ 2,\ -2$; б) при произвольном c.

45. $(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x)(|x - c| < \delta \to |x^4 - c^4| < \varepsilon)$:
а) при $c = 0,\ -1,\ 2,\ -2$; б) при произвольном c.

Список литературы

[1] Фреге Г. *Шрифт понятий: скопированный с арифметического формульный язык чистого мышления // Методы логических исследований.* — Тбилиси: Мецниереба, 1987.

[2] Чёрч А. *Введение в математическую логику. Том первый.* — М.: ИЛ, 1960. — 484 с.

[3] Тарский А. *Введение в логику и методологию дедуктивных наук*: Пер. с англ. — М.: ИЛ, 1948. — 326 с.

[4] Шенфилд Дж. *Математическая логика.* — М.: Наука, 1975. — 528 с.

[5] Столл Р. Р. *Множества. Логика. Аксиоматические теории*: Пер. с англ. — М.: Просвещение, 1968. — 232 с.

[6] Фрейденталь Х. *Язык логики.* — М.: Наука, 1969. — 136 с.

[7] Назиев А. Х. *Вводный курс математики. 2а: Логика.* Учебное пособие. — Рязань: Изд-во РГПУ, 2000. — 125 с.

[8] Назиев А. Х., Моисеев С. А. *Задачник-практикум по математической логике.* — Рязань, Изд-во РГУ, 2011. — 80 с.

[9] Grzegorczyk A. *An outline of Mathematical Logic.* — Dordrecht–Boston: D. Reidel Publish. Comp.; Warszawa: PWN–Polish Scientific Publishers, 1974. — 596 p.

[10] Monk D. *Mathematical Logic.* — New York Inc.: Springer-Verlag, 1976. — 531 p.

[11] Quine W. V. O. *Mathematical Logic.* — Cambridge (Mass.): Harvard UP, 1951. — 346 p.

[12] Quine W. V. O. *Philosophy of logic.* — Englewood Cliffs: Prentice Hall, 1970 — 110 p.

[13] Quine W. V. O. *Elementary Logic.* — New York: Harper & Row Publ., Inc., 1965. — 130 p.

[14] Suppes P. *Introduction to Logic.* — Princeton, N. J.: Van Nostrand. — 1957. — 330 p.